ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

Цель работы: изучение зависимости периода колебаний физического маятника от положения точки подвеса и определение ускорения свободного падения.

Задание: измерить период колебания физического маятника при различных положениях точки подвеса. По этим данным определить ускорение свободного падения.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: ознакомиться по учебнику с понятиями физического маятника, колебательного движения, уравнением колебаний физического маятника. Ответить на контрольные вопросы.

Литература

1. И. В. Савельев, *Курс общей физики, т. 1: Механика, молекулярная физика*, М.: Наука, 1987, §§38, 39, 54

Контрольные вопросы

1. Дать определения математического и физического маятников.
2. Дать определение гармонических колебаний. Что такое амплитуда, фаза, период, частота колебаний?
3. Дать определение момента силы и момента инерции.
4. Вывести формулу (1) для момента инерции стержня.
5. Сформулировать теорему Штейнера.
6. Записать основное уравнение вращательного движения.
7. Получить зависимость $T(a)$ (формула (6)) для используемого в работе маятника. Нарисовать качественно график этой зависимости.
8. Рассказать порядок выполнения работы.
9. Почему отклонения маятника от положения равновесия не должно превышать 5–7°? Что изменится, если они будут порядка 50–60°?
10. Получить формулы (8) и (9) для расчета ускорения свободного падения g и погрешности Δg.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Описание аппаратуры и метода измерений

В работе используется физический маятник, который представляет собой стальную трубу длиной около метра. По трубе может перемещаться муфта, с помощью которой маятник подвешивается к кронштейну на стене. Массой муфты можно пренебречь. Схема установки изображена на рис. 1.

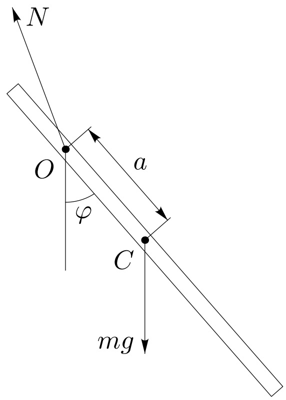

Рис. 1. Схема установки

Математическая модель используемого в работе маятника — однородный стержень длины L и массы m. Как известно, момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс C и перпендикулярной стержню, равен

$$J_c = \frac{1}{12} m L^2. \tag{1}$$

Момент инерции относительно оси, перпендикулярной стержню и отстоящей на расстояние a от его центра масс (именно относительно такой оси O вращается маятник в работе), можно найти по теореме Штейнера

$$J_o = J_c + ma^2 = \frac{1}{12} m L^2 + ma^2. \tag{2}$$

Запишем уравнение движения стержня — основное уравнение вращательного движения

$$J\beta = M,$$

где J — момент инерции стержня относительно оси вращения, β — угловое ускорение стержня, M — проекция суммарного момента внешних сил, действующих на стержень, относительно какой-либо точки на оси вращения стержня на ось вращения. Будем описывать положение стержня углом его отклонения от вертикали φ (см. рисунок 1). Тогда $\beta = \ddot{\varphi}$. В соответствие с выбором направления отсчета для угла, положительное направление оси вращения — это направление "на нас". На стержень действуют две силы: сила тяжести mg, приложенная в центре масс C, и сила реакции подвеса N, приложенная в точке подвеса O. Момент силы N относительно точки O равен нулю. Момент силы mg относительно точки O равен $mga\sin\varphi$ и направлен против оси вращения. Окончательно находим

$$J_o\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi. \tag{3}$$

Это уравнение описывает колебания маятника. Если во время движения максимальный угол отклонения маятника от вертикали (его амплитуда) не превышает 5–7° (около 0.1 радиана), то можно воспользоваться разложением синуса в ряд Тейлора

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$$

Относительная величина второго члена в правой части составляет $\varphi^2/6$, что для углов порядка 0.1 радиана дает погрешность менее 0.2%. При указанных амплитудах можно ограничиться первым членом в правой части и записать

$$J_o\ddot{\varphi} = -mga\varphi. \tag{4}$$

Это уравнение гармонических колебаний. Его решение имеет вид

$$\varphi(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + B\right), \tag{5}$$

где $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_o}{mga}}$ — период колебаний, A и B — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий. A называют амплитудой, а B — начальной фазой колебаний.

Если же амплитуда отклонения больше, чем 5–7°, то колебания описываются нелинейным уравнением (3). Угол отклонения меняется в этом случае по более сложному, чем (5), закону. Кроме того, период колебаний начинает зависеть от амплитуды.

Подставляя найденное в (2) значение J_o, получим для периода колебаний окончательную формулу

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2/12 + a^2}{ga}}. \tag{6}$$

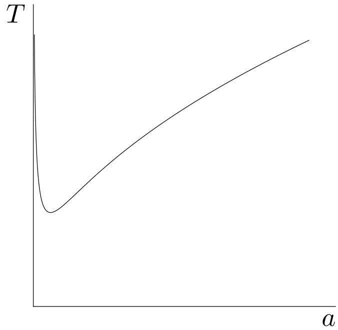

Рис. 2. Зависимость $T(a)$.

Именно эта зависимость исследуется в эксперименте. Для этого последовательно передвигают муфту по стержню, каждый раз измеряя период колебаний получившегося маятника.

Обсудим качественно, что дает найденная зависимость (6). При малых a (точнее, при $a \ll L$) можно пренебречь величиной a^2 по сравнению с $L^2/12$. Тогда мы получим, что $T \sim a^{-1/2}$. При больших a наоборот, можно пренебречь слагаемым $L^2/12$ по сравнению с a^2. Тогда мы получим $T = 2\pi\sqrt{a/g}$, что соответствует математическому маятнику. Зависимость $T(a)$ качественно изображена на рисунке 2. Конечно, мы не можем сделать a слишком большим, так как маятник имеет ограниченные размеры.

При некотором значении a период колебаний имеет минимум. По известным правилам анализа это значение можно определить из уравнения $T'(a) = 0$, причем дифференцировать можно не сам период T, а выражение под корнем в формуле (6)

$$\left(\frac{L^2/12 + a^2}{ga}\right)' = \frac{1}{g}\left(-\frac{L^2}{12a^2} + 1\right) = 0,$$

откуда

$$a_{\min} = \frac{L}{\sqrt{12}}. \tag{7}$$

Порядок выполнения работы

1. Знакомятся с установкой и описанием работы.

2. Устанавливают муфту на расстоянии 15 см от центра железной трубы (он помечен желтой краской).
3. Устанавливают маятник так, чтобы вырезы муфты разместились симметрично на призмах кронштейна.
4. Отклоняют стержень от вертикали не более чем на 5–7° и отпускают. Измеряют время 20 полных колебаний маятника и заносят его в таблицу.

Внимание! Период колебаний используемого маятника порядка 1.5 с, а разница между минимальным и максимальным периодами порядка 0.1 с. Поэтому измерения периода нужно производить очень тщательно, чтобы добиться точности не менее 0.01 с.

5. Повторяют пункт 4 еще два раза.
6. Последовательно устанавливая муфту на расстояниях 20, 25, ... , 45 см от центра железной трубы, повторяют пункты 3–5.

Результаты должны быть оформлены в виде таблицы (см. таблицу 1).

Таблица 1

<table>
<tr><th>a, см</th><th>t, с</th><th>$t_{ср}$, с</th><th>$\Delta t_{сл}$, с</th><th>T, с</th><th>$\Delta T_{сл}$, с</th></tr>
<tr><td rowspan="3">15</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">20</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">45</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Обработка результатов измерений

1. Для каждого значения a вычисляют $t_{ср}$ из трех измерений и заносят в таблицу.

2. Для каждого значения a вычисляют случайную погрешность

$$\Delta t_{\text{сл}} = \alpha_{n,p}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta t_i)^2}{n(n-1)}}$$

(для $n = 3$ и $p = 0.7$ коэффициент $\alpha_{n,p} = 1.39$) и заносят в таблицу.
3. Для каждого значения a вычисляют $T = t_{\text{ср}}/20$ и $\Delta T_{\text{сл}} = \Delta t_{\text{сл}}/20$ и заносят в таблицу.
4. Строят график зависимости $T(a)$.

Внимание! Выбирайте крупный масштаб по оси T и сдвигайте начало координат, так чтобы график занимал весь лист.

5. Определяют по графику значение a, при котором период минимален, и сравнивают с теоретическим значением, вычисленным по формуле (7).
6. По одному из измерений определяют g

$$g = \frac{4\pi^2(L^2/12 + a^2)}{aT^2} \tag{8}$$

и погрешность

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2L^2}{L^2+12a^2}\frac{\Delta L}{L} + \frac{|L^2-12a^2|}{L^2+12a^2}\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta T}{T} \tag{9}$$

и сравнивают с табличным значением.